

Лекция 7

Краткое введение в ТОЭ
(Теоретические основы
электротехники)

Цепи переменного тока

Электрические цепи, в которых действуют изменяющиеся во времени синусоидальные токи и напряжения называются цепями переменного тока

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) ; u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) ; e = E_m \sin(\omega t + \psi_e) .$$

Связь угловой частоты с частотой f [Гц=1/с] или с периодом $T=1/f$ [с] : $\omega = 2\pi f = 2\pi / T$

Действующие значения тока и напряжения:

количество тепла, выделенное на участке цепи с сопротивлением r за время T , соответствующее периоду тока i :

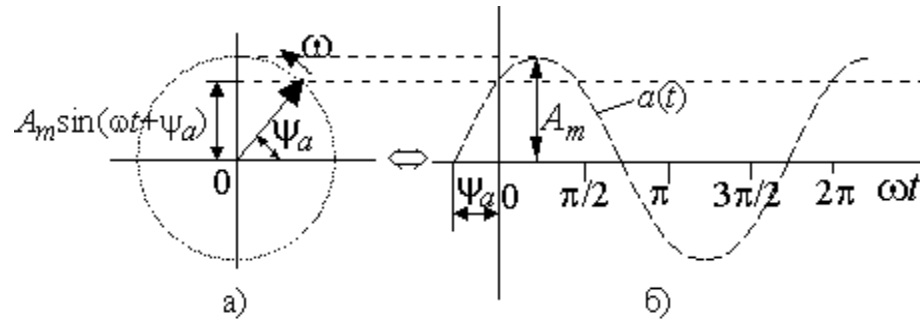
$$Q = \int_0^T i^2 r dt$$

/ некоторый постоянный ток, при протекании которого по тому же участку цепи за время T выделится такое же количество тепла:

$$I^2 r T = \int_0^T i^2 r dt \Rightarrow I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [I_m \sin(\omega t + \psi_i)]^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$
$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Изображение периодических функций тока и напряжения комплексными величинами

$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \psi_a) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{A}_m = A_m e^{i\psi_a}$$



Закон Ома

Связь между током, напряжением и сопротивлением участка цепи

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}r$$

Резистивное сопротивление

$$u_r(t) = r i_r(t)$$

$$\dot{U}_R = R I_R e^{j\psi_i} = R \dot{I}_R$$

Индуктивное сопротивление

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\dot{U}_L = j\omega L I_L e^{j\psi_i} = j\omega L \dot{I}_L = Z_L \dot{I}_L$$

Емкостное сопротивление

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$\dot{I}_C = j\omega C U_C e^{j\psi_u} = j\omega C \dot{U}_C$$

$$\dot{U}_C = -\frac{j}{\omega C} \dot{I}_C = Z_C \dot{I}_C$$

Закон Ома для цепи переменного тока.

Полное сопротивление

$$\dot{U} = \left(R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) \dot{I} = (R + jX) \dot{I} = \dot{I} Z$$

R – активное сопротивление,

X – реактивное сопротивление

Формальная запись закона Ома для цепи переменного тока в комплексных изображениях тока и напряжения совпадает с законом Ома для цепи постоянного тока

Мощность в цепи синусоидального тока

Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении элементарного электрического заряда

$$p = \frac{dA}{dt} = ui \quad \text{Мгновенная мощность}$$

$$P = \frac{A}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt \quad \text{Средняя мощность за период}$$

φ - угол между током и напряжением: $\dot{I}_m = I_m e^{-i\varphi}$, $\dot{U}_m = U_m$

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m Z, \quad \frac{U_m}{I_m} = e^{-i\varphi} Z \Rightarrow Z = |Z| e^{i\varphi}, \quad \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = |Z|$$

Выражение для средней мощности:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) dt = \\ = \frac{U_m I_m}{2T} \int_0^T [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = UI \cos \varphi$$

$$Z = R + jX = |Z| (\cos \varphi + j \sin \varphi) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{R}{|Z|} \Rightarrow UI \cos \varphi = UI \frac{R}{|Z|} = I^2 R$$

- Активная мощность : мощность, выделяемая в активном сопротивлении

Активная и реактивная мощность

Мгновенная мощность может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} p &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi) = \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos \varphi \cos(2\omega t - 2\varphi) + UI \sin \varphi \sin(2\omega t - 2\varphi) \\ &= UI \cos \varphi (1 - \cos(2\omega t - 2\varphi)) + UI \sin \varphi \sin(2\omega t - 2\varphi) \\ &= p_1 + p_2 \end{aligned}$$

p_1 - мгновенная мощность в активном сопротивлении

p_2 - мгновенная мощность в реактивном сопротивлении

Амплитудное значение мощности в реактивном сопротивлении называется реактивной мощностью:

$$Q = UI \sin \varphi = UI \frac{X}{|Z|} = I^2 X$$

Полная мощность:

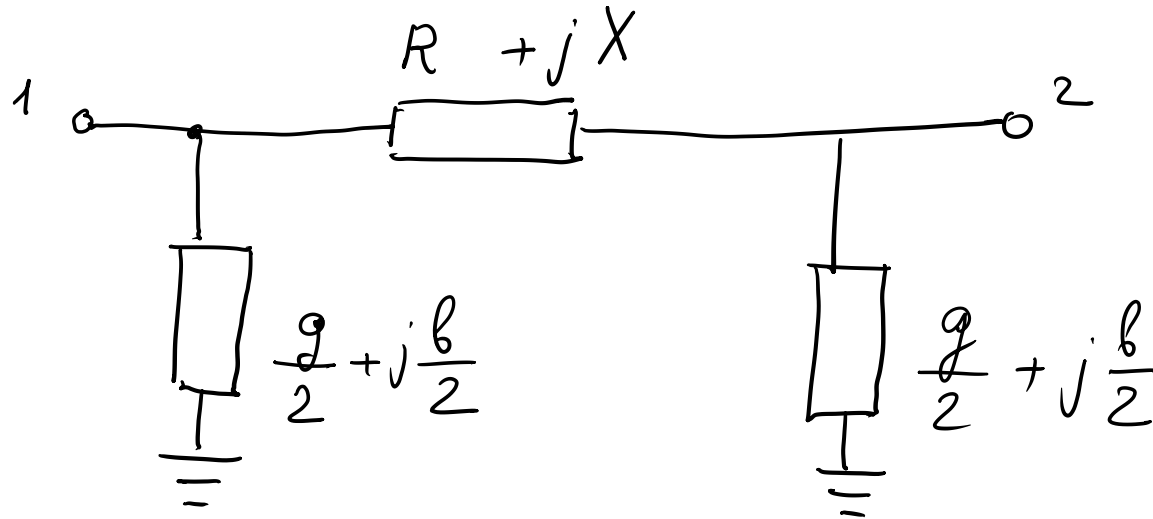
$$S = UI = \sqrt{(UI \sin \varphi)^2 + (UI \cos \varphi)^2} = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Комплексная мощность

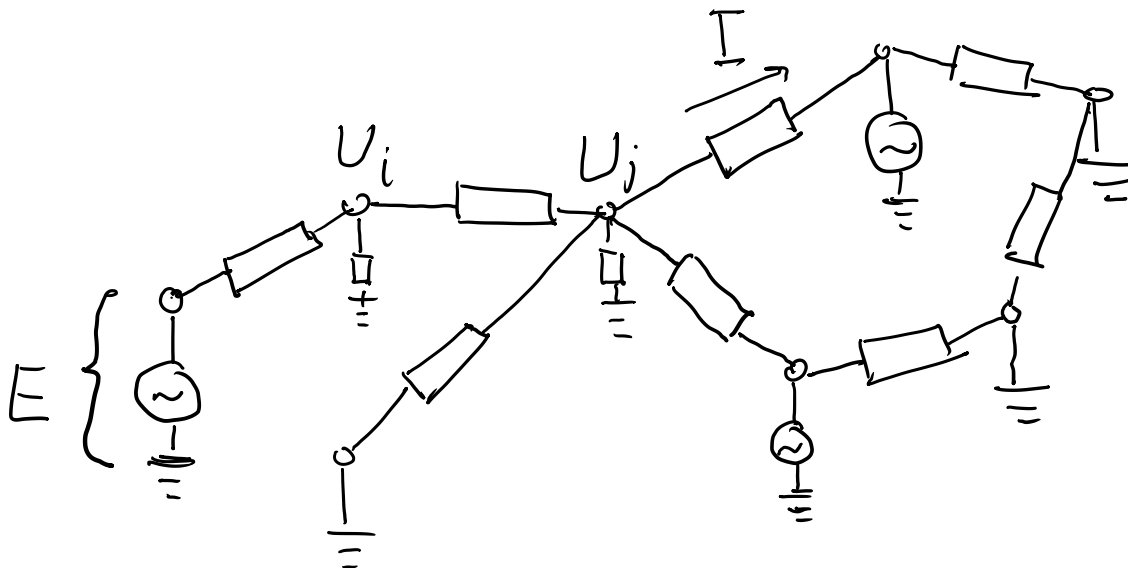
$$\begin{aligned}\dot{S} &= P + jQ = UI(\cos \varphi + j \sin \varphi) = UIe^{j\varphi} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} \\ &= Ue^{j\psi_u} Ie^{-j\psi_i} = \dot{U} \dot{I}^*\end{aligned}$$

Модель электрической сети

- Модель линии электропередачи

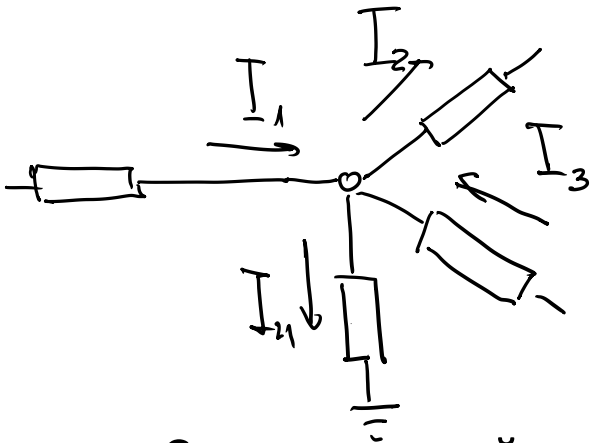


Модель электрической сети



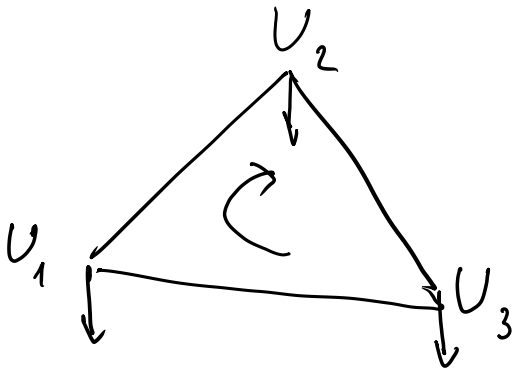
Законы Кирхгофа

- Баланс токов в узлах сети



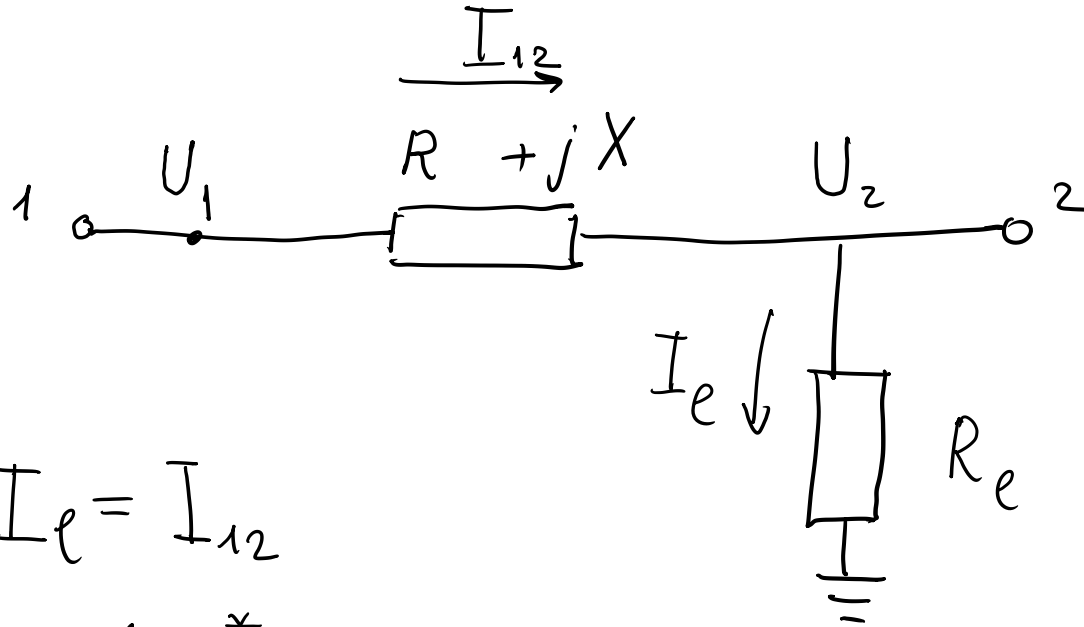
$$\sum_{s \in B(r)} I_{sr} - \sum_{k \in A(s)} I_{rk} - I_r = 0$$

- Сумма падений напряжений по замкнутому контуру равна сумме 0



$$\sum_{j=2}^M (U_j - U_{j-1}) + (U_1 - U_M) = 0$$

Ток, напряжение и мощность на участке цепи



$$I_e = I_{12}$$

$$S_e = U_2 I_e^*$$

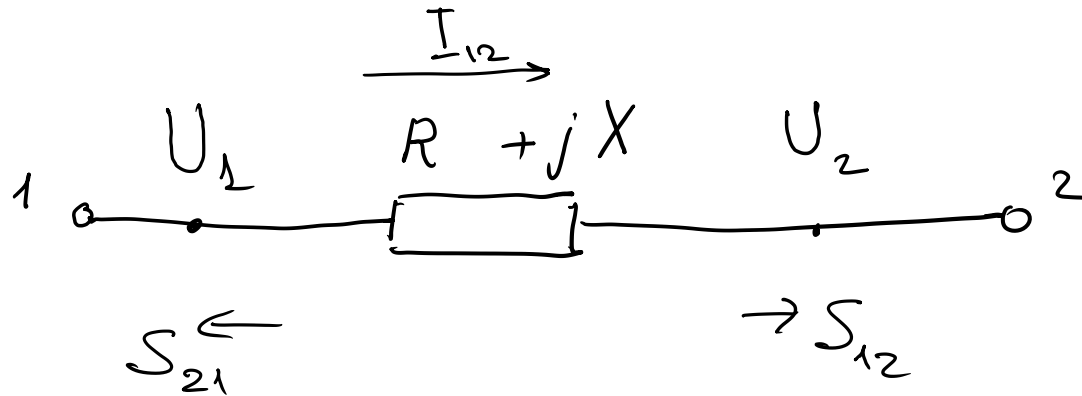
$$Z I_e = (U_2 - U_1), \quad Z = R + jX$$

$$S_e = U_2 (U_2 - U_1)^* / Z^*$$

Пример

- $U_1 = 500 \text{ (кВ)}$
- $\gg U_2 = 490 \cdot \exp(i \cdot \pi / 180)$
- $U_2 =$
- $489.925370626632 + 8.55167915426892i$
- $\gg Z = 1 + i \cdot 10 \text{ (Ом)}$
- $Z =$
- $1 + 10i$
- $\gg I = (U_2 - U_1) / Z \text{ (А)}$
- $I =$
- $0.746952100686346 + 1.08215814740546i$
- $\gg S = U_2 \cdot \text{conj}(I) \text{ (МВт)}$
- $S = P + iQ$
- $375.205054039889 - 523.789036735574i$

Потери в линии электропередачи



$$S_{12} = U_2 (U_2 - U_1)^* / Z^*$$

$$S_{21} = U_1 (U_1 - U_2)^* / Z^*$$

$$S_{12} + S_{21} = (U_2 - U_1)(U_2 - U_1)^* / Z^* = |U_2 - U_1|^2 / Z^*$$

$$U_1 = V_1 e^{j\delta_1}, U_2 = V_2 e^{j\delta_2}$$

$$|U_2 - U_1|^2 = (V_2 e^{j\delta_2} - V_1 e^{j\delta_1})(V_2 e^{-j\delta_2} - V_1 e^{-j\delta_1}) =$$

$$= V_1^2 + V_2^2 - V_1 V_2 e^{j(\delta_2 - \delta_1)} - V_1 V_2 e^{j(\delta_1 - \delta_2)} =$$

$$= V_1^2 + V_2^2 - 2 V_1 V_2 \cos(\delta_2 - \delta_1)$$

$$\Delta S = (V_1^2 + V_2^2 - 2 V_1 V_2 \cos(\delta_2 - \delta_1)) / Z^*$$

$$\Delta P = (V_1^2 + V_2^2 - 2 V_1 V_2 \cos(\delta_2 - \delta_1)) \cdot \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$\Delta Q = (V_1^2 + V_2^2 - 2 V_1 V_2 \cos(\delta_2 - \delta_1)) \cdot \frac{X}{R^2 + X^2}$$

$$>> dS = (U2-U1)*conj(U2-U1)/conj(Z)$$

$$dS =$$

$$1.72900369671577 + 17.2900369671577i$$

$\Delta P, \Delta Q$ - вращающ. п.ч

V, δ при $|\delta_2 - \delta_1|$ гос.ч.
малых

Система уравнений узловых напряжений (УУН) в форме баланса токов

Баланс токов в узле k :

$$I_k = \sum_{j \neq k} (U_k - U_j) Y_{kj} = \left(\sum_j Y_{kj} \right) U_k - \sum_{j \neq k} Y_{kj} U_j$$

$$Y_{kj} = 1 / Z_{kj}$$

$$I = Y U$$

$$Y = \begin{bmatrix} \sum Y_{1j} & -Y_{12} & \dots & -Y_{1n} \\ -Y_{12} & \sum Y_{2j} & & -Y_{2n} \\ & & \dots & \\ -Y_{1n} & \dots & & \sum Y_{nj} \end{bmatrix}$$

Балансирующий узел (swing bus)

$\mathbf{e}^T \mathbf{Y} \mathbf{1} = 0 \Rightarrow$ исключаем 1-е ур-е и фиксируем
напряжение в одном узле (например, в узле
находится генератор с заданной $\mathcal{M}^2/\text{с}$)

Такой узел называется балансирующим по току.

УУН в вещественной форме

$$Y = G + jB, \quad U = U' + jU''$$

$$YU = (G + jB)(U' + jU'') = GU' - BU'' + j(BU' + GU'')$$

$$= \begin{bmatrix} G & -B \\ B & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U' \\ U'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I' \\ I'' \end{bmatrix}$$

- система лин. ур-й
после фиксации напр. в БУ
и исключения ур-й для
БУ матрица системы
становится не вырожденной

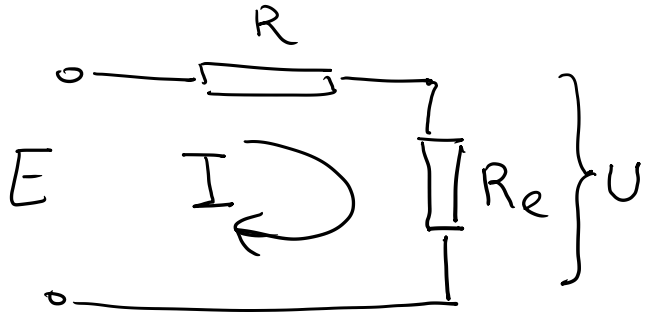
Система УУН в форме баланса мощностей

$$\underline{Y} \underline{U} = \underline{I}, \quad S = \underline{U} \underline{I}^*, \quad \underline{I} = S^* / \underline{U}^*$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{Y} \underline{U} = S^* / \underline{U}^* \\ \underline{U} (\underline{Y} \underline{U})^* = S \end{array} \right\} \text{нелинейные системы ур.н!}$$

Устойчивость процессов в электросетях

Сеть постоянного тока:



$$I = \frac{E}{R + R_e}$$

$$U = I R_e$$

$$P = UI = \frac{E^2 R_e}{(R + R_e)^2}$$

При каком сопротивлении нагрузки R_e достигается

максимальная мощность, потребляемая нагрузкой?

$$P' = \frac{E^2(R + R_e)^2 - 2(R + R_e)E^2 R_e}{(R + R_e)^4} = \frac{E^2(R + R_e) - 2E^2 R_e}{(R + R_e)^3} = 0$$

$$\Rightarrow R_e = R \Rightarrow p_{\max} = \frac{E^2}{4R}$$

Пусть имеется регулятор мощности нагрузки:

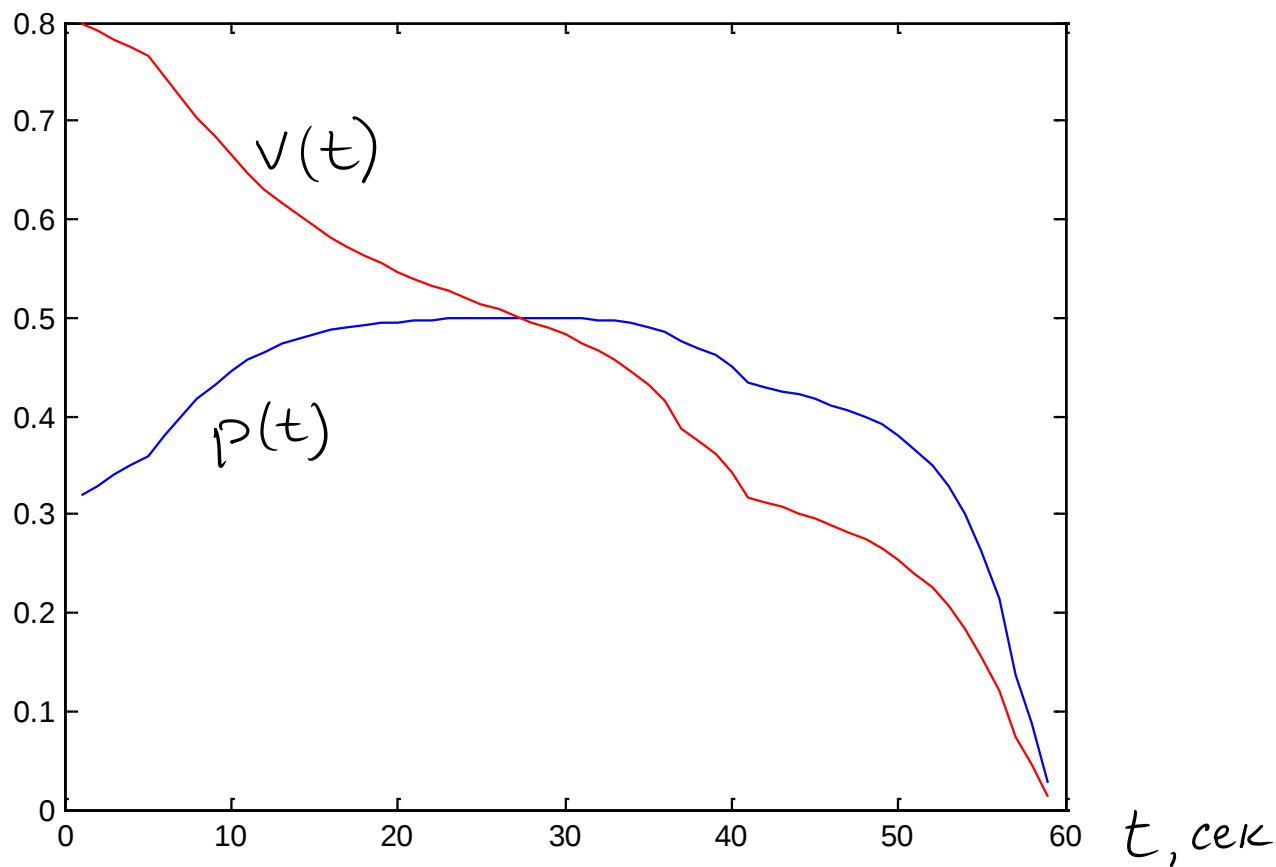
$$\dot{R}_e = \frac{E^2 R_e}{(R + R_e)^2} - p_0, \text{ где } p_0 - \text{некоторая заданная мощность}$$

$$\text{Если } p_0 > p_{\max} \Rightarrow R_e \rightarrow 0, p = \frac{E^2 R_e}{(R + R_e)^2} \rightarrow 0,$$

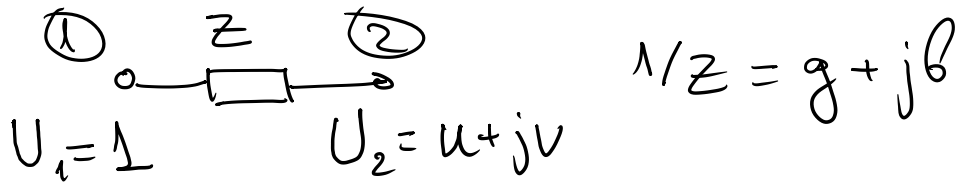
$$U = I R_e = \frac{E R_e}{(R + R_e)} \rightarrow 0$$

Пример

$$E=1V, R=0.5[OM], R_e(0)=2[OM], p_0=p_{max}+0.01$$



Система УУН в форме баланса токов: пример



Узел ① - балансирующий, задана мощность нагрузки в уз. 2 S_2

$$S_2 = (u + jv)(u - jv - 1)(g - jb) = (u^2 + v^2 - u - jv)(g - jb)$$

$$P_2 = (u^2 + v^2)g - ug - bv \quad | \times b$$

$$Q_2 = -(u^2 + v^2)b - vg + bu \quad | \times g$$

$$P_2 b + Q_2 g = -(b^2 + g^2)v \Rightarrow v = -\frac{P_2 b + Q_2 g}{b^2 + g^2}$$

Подставим в первое ур-е для поиска u :

$$u^2 - u - \frac{bv}{g} + v^2 - \frac{p_2}{g} = 0$$

$$u^2 - u + c = 0, \quad c = c(p_2, q_2, g, b), \quad c \rightarrow +\infty, \quad p, q \rightarrow +\infty$$

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2} \Rightarrow c > 1/4 \Rightarrow \text{уравнение не имеет решений}$$

$$\text{При } p_2 = q_2 = 0 \Rightarrow v = 0, \quad u^2 - u = 0 \Rightarrow$$

2 корня: $u_1 = 1, u_2 = 0 \Rightarrow$ общий вид зависимости

модуля напряжения от передаваемой мощности

